Conceptos: Fracciones, decimales periódicos, densidad y clausura.

1. Demuestre que la suma de dos números racionales es siempre un número racional (propiedad de clausura).
2. Exprese el número decimal periódico $0.323232...$ como una fracción irreducible.
3. Explique por qué no existe un "primer número racional" después del cero (Propiedad de densidad).
4. Encuentre un número racional situado exactamente a la mitad entre $1/4$ y $1/3$.
5. Determine si el conjunto de los números irracionales es cerrado bajo la suma (Pista: piense en $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})$).
6. Simplifique la expresión: $\frac{2/3+1/4}{5/6-1/2}$.
7. Demuestre que $\sqrt{2}$ no puede ser expresado como p/q, por lo tanto, no es racional.
8. Ordene de menor a mayor: $0.3, 1/3, 0.33, 3/10$.
9. Escriba tres números irracionales diferentes entre 2 y 3.
10. ¿Es cierto que entre cualquier par de números reales siempre existe un racional? Justifique.

Conceptos: Axiomas de suma y multiplicación, elementos neutros e inversos.

11. Nombre los 9 axiomas que definen a $\mathbb{R}$ como un **cuerpo** (o *field*).
12. Demuestre, usando solo axiomas, que $a \cdot 0 = 0$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$.
13. Demuestre la ley de cancelación para la suma: si $a+c=b+c$, entonces $a=b$.
14. Identifique el **inverso multiplicativo** de $\sqrt{2}-1$ y racionalice el resultado.
15. Use la propiedad distributiva para demostrar que $(-1) \cdot a = -a$.
16. ¿Por qué el número 0 no tiene inverso multiplicativo en la estructura de cuerpo?
17. Demuestre que $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ utilizando los axiomas de cuerpo.
18. Resuelva para x en la ecuación $ax+b=c$ ($a \neq 0$), indicando qué axioma usa en cada paso.
19. Verifique si el conjunto $\{0, 1\}$ con la suma y producto "módulo 2" cumple con la estructura de cuerpo.
20. Explique la diferencia entre un elemento **neutro** y un elemento **inverso**.

Conceptos: Axiomas de orden, Supremo, Ínfimo y la Recta Real.

21. Si $a < b$ y $c < 0$, demuestre que $ac > bc$.
22. Dados $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 5\}$, halle el **Supremo** y el **Ínfimo** de A.
23. Explique el **Axioma de Completitud** (o del Supremo) y por qué los racionales no lo cumplen.
24. Demuestre que si $a^2 + b^2 = 0$, entonces $a = 0$ y $b = 0$.
25. Si $x > 0$, demuestre que $x + 1/x \geq 2$.
26. Defina formalmente un **conjunto acotado superiormente**.
27. Halle el máximo y el mínimo (si existen) del conjunto $B = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$.
28. Demuestre que si $a < b$, entonces $a < \frac{a+b}{2} < b$.
29. ¿Qué es la **Propiedad Arquimediana** de los números reales?
30. Determine si el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ tiene la propiedad del supremo.

Conceptos: Intervalos, inecuaciones lineales, cuadráticas, con raíces y potencias.

31. Resuelva la inecuación lineal: $3(x - 2) < 5x + 4$ y exprese el resultado en **notación de intervalos**.
32. Resuelva la inecuación cuadrática: $x^2 - 5x + 6 \leq 0$.
33. Halle el conjunto solución de: $\frac{x-1}{x+3} > 0$.
34. Resuelva: $x^3 - 4x > 0$.
35. Resuelva la inecuación con raíz: $\sqrt{x - 2} < 3$.
36. Resuelva: $x^2 \geq 9$. (¡Cuidado con los dos intervalos!).
37. Halle los valores de x que satisfacen: $\frac{1}{x} < 2$.
38. Resuelva la inecuación: $(x - 1)^2(x + 5) \leq 0$.
39. Resuelva: $\sqrt{x^2 - 4} \geq 0$.
40. Represente gráficamente en la recta numérica la solución de: $-2 < 2x + 4 \leq 10$.

Conceptos: Definición, Distancia, Propiedades y Desigualdad Triangular.

41. Resuelva la ecuación con valor absoluto: $|2x - 3| = 7$.
42. Resuelva la inecuación: $|x - 5| < 2$. (Interpretación de distancia).
43. Demuestre la **Desigualdad Triangular**: $|a + b| \leq |a| + |b|$.
44. Resuelva: $|3x + 2| \geq 4$.
45. Exprese la distancia entre x y -3 es menor a 5 usando valor absoluto.
46. Resuelva: $|x^2 - 10| = 6$.
47. Demuestre que $|a - b| \geq ||a| - |b||$.
48. Resuelva la inecuación: $|\frac{x-1}{x+2}| < 1$.
49. Grafique la función $f(x) = |x - 2| + 1$.
50. Halle todos los valores de x tales que $|x - 1| < |x + 3|$.

Conceptos: Pares ordenados, producto cartesiano, Reflexiva, Simétrica, Transitiva.

51. Sea $A = \{1, 2, 3\}$. Escriba una relación R en A que sea **reflexiva** pero no simétrica.
52. Determine si la relación $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$ es una relación de equivalencia o de orden.
53. Defina una **Relación de Equivalencia** y nombre sus tres propiedades obligatorias.
54. Sea la relación en $\mathbb{Z}$ definida por aRb si $a - b$ es par. Demuestre que es de equivalencia.
55. En la relación del ejercicio anterior, halle la **clase de equivalencia** del número 0.
56. Sea $A = \{a, b, c\}$. ¿Cuántas relaciones diferentes se pueden definir en A?
57. Explique qué significa que una relación sea **Antisimétrica**.
58. Sea S el conjunto de todos los humanos. La relación es "ser hermano de". ¿Es transitiva? ¿Es simétrica?
59. Represente mediante un diagrama de flechas la relación $R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ en el conjunto $\{1, 2, 3\}$.
60. ¿Qué es una **Partición** de un conjunto y cómo se relaciona con las relaciones de equivalencia?